2.54. Реализуйте функцию для решения системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x^1, x^2, ..., x^m) = 0, \\ f_2(x^1, x^2, ..., x^m) = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ f_m(x^1, x^2, ..., x^m) = 0; \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow F(\mathbf{x}) = 0, \; \mathbf{x} = (x^1, ..., x^m)^T$$

с точностью ε методом Ньютона со следующим заголовком

```
int root (double *x, void (*F)(double *, const double *, int),
          void (*dF)(double *, const double *, int)
          int m, double eps);
```

Здесь `x` — указатель на начальное приближение и полученный корень; `F` — указатель на функцию, задающую систему уравнений; `dF` — указатель на функцию , вычисляющую матрицу частных производных функции `F`; `eps` — точность. Возвращаемое значение: 0, если точность достигнута, -1, если решить не удалось.

Идеи реализации. Метод Ньютона для системы имеет вид

$$F'(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) = -F((\mathbf{x_n})), \quad F'(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right] \in \mathbf{R}^{m\times m}.$$

Критерием окончания вычислений можно взять неравенство $\max\limits_{i=1,\dots,m} |\mathbf{x}_k^i - \mathbf{x}_{k+1}^i| < \varepsilon$. Изучите сходимость метода для решения системы

$$\left\{\begin{array}{lcll} x^3 & - & y^2 & = 4 \\ xy^3 & - & y & = 14 \end{array}\right. , \quad F'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2 - 1 \end{pmatrix}$$

в зависимости от выбора начального приближения.

2.8 Математеческое моделирование, дифференциальные уравнения.

Построение матеатических моделей, описывающих конкретные физические, биологические, химические, социальные процессы, и последующее прямое моделирование предстваляет собой весма нетривиальную прикладную задачу, лежащую на стыке различных научных областей, и требующую математической грамотности и широкой эрудиции. Приводимые далее модели носят исключительно демонстрационный характер, поэтому следует скептически относиться к получаемым с их помощью прогнозам. А также помнить выскасывание Валентина Павловича Дымникова: “Каждая модель воспроизводит только те эффекты, которые в нее заложены”.

При решении дифференциальных задач данного раздела особое внимание следует уделить вопросам верификации алгоритмов, в том числе, проверке сходимости численно найденных дискретных функций к искомому решению при измельчении сеточного шага.

При численном моделировании реальных систем для физически осмысленных параметров, соответствующие дифференциальные уравнения и начальные данные необходимо предварительно отнормировать так, чтобы в процессе расчета значения искомых функций принимали значения порядка $O(1)$. Это требуется для сходимости найденных разностных решений к искомым дифференциальным.

Далее время может быть как непрерывным $t \geq 0$, так и дискретным параметром $k = 0, 1, \ldots$.

2.55. Провести прямое моделирование процесса размножения биологического вида без учета возраста особи и внешних факторов на основе дискретной модели однотипной популяции с неограниченным ростом $N_{k+1} = N_k + aN_k - bN_k$, где a, b — коэффициенты рождаемости и смертности соответственно.

Указание. В терминах коэффициента прироста $p = 1 + a - b$ имеем геометрическую прогрессию вида $N_k = p^k N_0$, N_0 — начальное условие. Отметим, что даже при "безобидном" удвоении за год, за сто лет получаем $2^{100} \sim 10^{30}$ особей. Для сравнения: поверхность суши порядка 150 000 000 $km^2 \sim 1.5\ 10^{20} mm^2$, среднее расстояние до солнца $150\,000\,000\, mk \sim 1.5\, 10^{14} mm$, диаметр диска галактики Млечный путь 100 000 световых лет, т.е. $10^{18}\, km \sim 10^{24} mm$. Оцените прогностическое время заселения нашей галактики конкретным видом, получаемое согласно модели.

В этой связи приведем высказывание Николая Сергеевича Бахвалова: "Неоправданное привлечение абстрактных понятий математики редко приносит реальную пользу".

2.56. Исследуйте поведение модели ограниченного роста с отловом $N_{k+1} = (1 + k\frac{\bar{N} - N_k}{N_k})N_k - M$, где $\bar{N}$ — оптимальное число особей, M — запланированный отлов, k — нормировочный коэффициент. Подберите значения параметров, порождающие различные типы динамики.

2.57. Одна из моделей роста потребительского спроса имеет вид $y_{n+1} = Cy_n^2$, что означает увеличение коэффициента геометрической прогрессии при увеличении числа элементов. Доказать, что $y_n = C^{-1}(Cy_0)^{2^n}$.

Указание. Сделать замену $v_n = Cy_n$ и по индукции показать, что $v_n = v_0^{2^n}$. Отметим, что для $C = 1, y_0 = 2$, $n = 10$ имеем $y_{10} = 2^{1024} \sim 10^{308}$. Для сравнения: предположительное число атомов видимой части вселенной порядка 10^{80}.

2.58. Проведите теоретический анализ и прямое моделирование процесса размножения на основе дискретной модели популяции с двумя ступенями развития (N_k^0 — молодняк, N_k^1 — зрелые особи) и неограниченным ростом

$$N_{k+1}^0 = p_{10} N_k^1, \quad N_{k+1}^1 = p_{11} N_k^1 + p_{01} N_k^0$$

для различных начальных условий N_0^0, N_0^1 и значений коэффииициентов p_{ij}.

Указание. Показать, что

$$N_{k+1}^1 = aN_k^1 + bN_{k-1}^1 \quad \text{при заданных } N_0^1, N_1^1 = p_{11}N_0^1 + p_{01}N_0^0,$$

где $a = p_{11}$, $b = p_{10}p_{01}$. Проверить, что если μ_1 и μ_2 — различные корни уравнения $\mu^2 - a\mu - b = 0$, то $N_k^1 = c_1\mu_1^k + c_2\mu_2^k$; если $\mu_1 = \mu_2$, то $N_k^1 = c_1\mu_1^k + c_2 k\mu_1^k$. При этом $c_{1,2}$ находятся из начальных условий для N_0^1, N_1^1. (См. также задачу 1.30.)

2.59. Для замкнутой дискретной модели караси-щуки

$$\begin{cases} C_{k+1} = (1 + a_c)C_k - b_c P_k C_k, \\ P_{k+1} = (1 - a_p)P_k + b_p C_k P_k \end{cases}$$

подберите параметры a_c, a_p, b_c, b_p и начальные условия C_0, P_0, порождающие качественно правдоподобную динамику.

Указание. Коэффициенты a_c и a_p отвечают за естественный прирост карасей и убыль щук соответственно. Величина $C_k P_k$ характеризует вероятность встреч, что сказывается на количестве особей каждого вида.

2.60. Сформулируйте алгоритм взаимодействия в системе “Озеро: ряска-караси-щуки” на основе трехмерного массива “озеро” и реализуйте прямое моделирование при различных входных параметрах. Попробуйте получить систему с устойчивой (квазипериодической) динамикой.

Указание. За основу можно взять правила модели “Жизнь”.

2.61. Численно найдите приближенное решение дифференциального уравнения $y'(x) = y(x) - e^x \cos x$ на отрезке $[0, \pi]$ при начальном условии $y(0) = 0$. Сравните с точным решением $y(x) = e^x \sin x$.

Идеи реализации. Разобьем отрезок $[0, \pi]$ на N частей с шагом $h = \pi/N$ и будем искать приближенные значения $y(x_k) \approx y_k$ только в точках $x_k = kh$ для $k = 0, 1, \dots, N$; $x_0 = 0, x_N = \pi$. Для этого заменим производную $y'(x)|_{x=x_k}$ по формуле $y'(x_k) = \frac{y(x_k+h) - y(x_k)}{h} + O(h)$ и получим уравнение на дискретную функцию $[y_0, y_1, \dots, y_N]$:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k),\ k = 0, 1, \dots, N - 1;\ y_0 = y(x_0).$$

Данный подход называется явным методом Эйлера.

2.62. Используя метод Эйлера, численно найдите приближенное решение дифференциального уравнения $y'(x) = -ay(x)$ на отрезке $[0, 1]$ при начальном условии $y(0) = 1$. Сравните с точным решением $y(x) = e^{-ax}$ для $a = 10, 1000$ при $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4$.

2.63. Численно найдите приближенное решение дифференциального уравнения $y'(x) = -ay(x)$ на отрезке $[0, 1]$ при начальном условии $y(0) = 1$, используя неявный метод Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k - hay_{k+1},\ k = 0, 1, \dots, N - 1;\ y_0 = y(x_0).$$

Сравните с точным решением $y(x) = e^{-ax}$ для $a = 10, 1000$ при $N = 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4$.

2.64. Напишите программу для численного решения дифференциального уравнения $y'(x) = f(x, y(x))$ на отрезке $[a, b]$ с начальным условием

$y(a) = y_a$, используя расчетные формулы метода Адамса второго порядка точности:

$$y_0 = y(x_0),\ x_0 = a, x_k = x_0 + kh, k = 0, \ldots, N,\ h = (b-a)/N,$$
$$y^*_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k),$$
$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y^*_{k+1})\big).$$

Решение оформите на основе N–кратного вызова функции

```
int Step(double * yk1, double *yk, double h,
         (void) (*fun)(double *, const double *, const double))
```

где `fun` является указателем на функцию, отвечающую за вычисление правой части $f(x, y)$. Проведите сравнение для задачи с известным решением.

Отметим, что рассмотренные методы Эйлера, Адамса, а также последующие алгоритмы можно применять для решения систем дифференциальных уравнений $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}),\ \mathbf{y} = (y_1(x), ..., y_m(x))^T$. В этом случае $\mathbf{y}_k$ также является вектором $\mathbf{y}_k = (y_{(k,1)}, ..., y_{(k,m)})^T$, где первый индекс k для $y_{(k,i)}$ означает соответствие точке x_k, а второй i для $i = 1, \ldots, m$ — номер уравнения.

2.65. Напишите программу для численного решения дифференциального уравнения $y'(x) = f(x, y(x))$ на отрезке $[a, b]$ с начальным условием $y(a) = y_a$, используя расчетные формулы метода Рунге–Кутта третьего порядка точности:

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf\left(x_i + h/2, y_i + k_1/2\right),$$
$$k_3 = hf(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2), \quad y_{i+1} = y_i + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6.$$

Проведите сравнение для задач с известным решением:
$y'(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $y(0) = 1$, $y(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $x \in [0, 10]$;
$y'(x) = 0.5y(x) + 0.5e^x$, $y(0) = 1$, $y(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$.
Исследуйте близость функций $y(x)$ и y_i при $h = 1, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7}$.

2.66. Напишите программу для численного решения дифференциального уравнения $y'(x) = f(x, y(x))$ на отрезке $[a, b]$ с начальным условием $y(a) = y_a$, используя расчетные формулы метода Рунге–Кутта четвертого порядка точности:

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf\left(x_i + h/2, y_i + k_1/2\right),$$
$$k_3 = hf\left(x_i + h/2, y_i + k_2/2\right), \quad k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3),$$
$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6.$$

Исследуйте близость функций $y(x)$ и y_i для задач с известным решением, см. 2.65.

2.67. Численно найдите решение системы Лотки–Вольтерра

$$\begin{cases} y_1'(x) = \alpha y_1(x) - \mu\, y_1(x) y_2(x), & \alpha = 1, \mu = 3, \\ y_2'(x) = -\beta y_2(x) + \nu\, y_1(x) y_2(x), & \beta = 1, \nu = 1. \end{cases}$$

2.68. Для системы Лоренца

$$\begin{cases} x'(t) = \delta(y - x), & \delta = 10.0, \\ y'(t) = rx - y - xz, & r = 28.0, \\ z'(t) = xy - bz, & b = 8/3, \end{cases}$$

численно найдите решение и постройте траектории в $\mathbf{R}^3$ для различных начальных данных.

2.69. Пусть из некоторого положения с координатами $\mathbf{S}(0) = (x_0, y_0, z_0)^T$ брошено точечное тело с начальной скоростью $\mathbf{U}(0) = (u_0, v_0, w_0)^T$. Считая, что на тело действует только сила тяжести, найдите систему дифференциальных уравнений, описывающих изменения координат $\mathbf{S}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ и вектора скорости $\mathbf{V}(t) = (u(t), v(t), w(t))^T$. Аналитически и численно найдите ее решение и постройте соответствующие графики для различных значений начальной координаты и скорости.

Решение. Второй закон Ньютона и уравнения движения приводят к следующей системе:

$$\begin{cases} u'(t) = 0,\ v'(t) = 0, w'(t) = -g(x, y, z); \\ x'(t) = u(t),\ y'(t) = v(t),\ z'(t) = w(t); \\ u(0) = u_0,\ v(0) = v_0,\ w(0) = w_0; \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ z(0) = z_0. \end{cases}$$

Если $g(x, y, z) = \mathrm{const}$, то ее решение имеет вид:

$$\begin{cases} u(t) = u_0,\ v(t) = v_0, w(t) = w_0 - gt; \\ x(t) = x_0 + u_0 t,\ y(t) = y_0 + v_0 t,\ z(t) = z_0 + w_0 t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

При численном решении исходной системы можно использовать, например, явный метод Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = 0,\ \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = 0,\ \frac{w^{n+1} - w^n}{\tau} = -g(x^n, y^n, z^n); \\ \frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = u^n,\ \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = v^n,\ \frac{z^{n+1} - z^n}{\tau} = w^n. \\ u^0 = u_0,\ v^0 = v_0,\ w^0 = w_0; \\ x^0 = x_0,\ y^0 = y_0,\ z^0 = z_0. \end{cases}$$

Если g считать константой, то решение системы разностных уравнений также можно выписать в явном виде.

2.70. Пусть из некоторого положения с координатами $\mathbf{S}(0) = (x_0, y_0, z_0)^T$ брошено точечное тело с начальной скоростью $\mathbf{U}(0) = (u_0, v_0, w_0)^T$. Считая, что на тело действует сила тяжести, зависящая от высоты, и сила сопротивления воздуха, зависящая от скорости выпишите систему дифференциальных уравнений, описывающих изменения ее координат $\mathbf{S}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ и вектора скорости $\mathbf{V}(t) = (u(t), v(t), w(t))^T$. Численно найдите ее решение и постройте соответствующие графики для различных параметров задачи.

Указание. Например, можно считать, что

$$\begin{cases} u'(t) = -\alpha|u(t)| - \beta u^2(t), \\ v'(t) = -\alpha|v(t)| - \beta v^2(t), \\ w'(t) = -g + 3 \cdot 10^{-6} z(t) - \alpha|w(t)| - \beta w^2(t), \\ x'(t) = u(t),\ y'(t) = v(t),\ z'(t) = w(t). \end{cases}$$

2.71. Пусть в пространстве в начальный момент времени $t = 0$ имеется n точечных тел, каждое из которых характеризуется массой m_i, координатами $\mathbf{S}_i(0) = (x_i(0), y_i(0), z_i(0))$ и скоростью $\mathbf{U}_i(0) = (u_i(0), v_i(0), w_i(0))$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Провести численное моделирование движения данной системы, учитывая только гравитационные силы.

Указание. Согласно закону всемироного тяготения и правилу сложения сил, на i-е тело в каждый момент времени t действует суммарная сила $\mathbf{F}_i(t) = \sum_{j\neq i}^{n} \mathbf{F}_{i,j}(t)$. При этом вектор $\mathbf{F}_{i,j}(t)$ направлен от i-го тела к j-ому, а его длина может быть найдена по формуле $F_{i,j}(t) = G\dfrac{m_i m_j}{s_{i,j}^2(t)}$. Здесь G — гравитационная постоянная, $s_{i,j}(t)$ — евклидова длина вектора $\big(\mathbf{S}_i(t) - \mathbf{S}_j(t)\big)$. Применяя второй закон Ньютона $m_i \mathbf{a}_i(t) = \mathbf{F}_i(t)$ и уравнения движения $\mathbf{U}_i'(t) = \mathbf{a}_i(t)$, $\mathbf{S}_i'(t) = \mathbf{U}_i(t)$, получаем искомую систему:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_i'(t) = G \sum_{j\neq i}^{n} \frac{m_j}{s_{i,j}^3(t)} (\mathbf{S}_j(t) - \mathbf{S}_i(t)); \\ \mathbf{S}_i'(t) = \mathbf{U}_i(t), \quad i = 1, \ldots, n; \end{cases}$$

при заданных начальных условиях $\mathbf{S}_i(0)$, $\mathbf{U}_i(0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Напомним, что для получения разумных результатов численного моделирования необходимо провести нормировку входных параметров.

2.72. Приближенно найдите температуру $u(x)$ однородного тонкого стержня длины L с коэффициентом температуропроводности μ при условии, что на эго концах температура фиксирована и равна $u(0) = \nu_0, u(L) = \nu_L$, а также задана функция нагрева внешним источником $f(x)$, $x \in (0, L)$. Для расчета используйте дифференциальное уравнение

$$-\mu u''(x) = f(x), x \in (0, L),\ u(0) = \nu_0, u(L) = \nu_L.$$

Указание. Разобьем отрезок на M частей с шагом $h = L/M$ и будем искать приближенные значения $u(x_m) \approx u_m$ только в точках $x_m = mh$, $m = 0, 1, \ldots, M$; $x_0 = 0, x_M = L$. Для этого заменим производную $u''(x)|_{x=x_m}$ по формуле $u''(x_m) = (u(x_m + h) - 2u(x_m) + u(x_m - h))/h^2 + O(h^2)$ и получим уравнение на вектор неизвестных $[u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{N-2}, u_{N-1}, u_N]$:

$$-\mu \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{h^2} = f(x_m),\ m = 1, \ldots, M-1;\ u_0 = \nu_0, u_M = \nu_L.$$

Для решения полученной системы уравнений с матрицей

$$
\begin{pmatrix}
1 & & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\mu/h^2 & 2\mu/h^2 & -\mu/h^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\mu/h^2 & 2\mu/h^2 & -\mu/h^2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\mu/h^2 & 2\mu/h^2 & -\mu/h^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\mu/h^2 & 2\mu/h^2 & -\mu/h^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & & 1
\end{pmatrix}
$$

и правой частью $\mathbf{b} = [\nu_0, f(x_1), f(x_2), \cdot, f(x_{N-2}), f(x_{N-1}), \nu_L]$ можно применить метод Гаусса, но существенно лучше — метод прогонки, являющийся эффективной модификацией метода Гаусса для трехдиагональной системы, см. 2.47.

Считая, что искомое решение имеет вид $u(x) = \sin(\frac{\pi x}{L}) + \nu_0 + \frac{\nu_L - \nu_0}{L}x$, найдем, два раза дифференцируя $u(x)$, соответствующую правую часть: $f(x) = \mu\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin(\pi x/L)$. Пусть $\mu = 0.1$, $L = 1$, $\nu_0 = 1$, $\nu_L = 2$. Для полученной задачи с известным ответом сравните вычисленное решение $[u_0, u_1, \ldots, u_N]$ с точными значениями $[u(x_0), \ldots, u(x_N)]$ при $N = 3, 11, 1001$.

2.73. Приближенно вычислите как меняется со временем температура $u(t,x)$ в однородном тонком стержне длины L с коэффициентом температуропроводности μ при условии, что заданы начальная температура стержня $u(0,x) = u^0(x)$, температура на его концах $u(t,0) = \nu_0(t), u(t,L) = \nu_L(t)$ и функция внешнего нагрева $f(t,x)$, $x \in (0,L)$, $t \in [0,T]$. Для расчета используйте уравнение

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + f(t,x),\ x \in (0,L),\ t \in [0,T],\\
&u(t,0) = \nu_0(t), u(t,L) = \nu_L(t),\ u(0,x) = u^0(x).
\end{aligned}
$$

Указание. Разобьем отрезок $[0,L]$ на M частей с шагом $h = L/M$, отрезок $[0,T]$ на N частей с шагом $\tau = T/N$ и будем искать приближенные значения $u(t_n, x_m) \approx u_m^n$ в точках $x_m = mh$, $m = 0,1,\ldots,M$, $t_n = n\tau$, $n = 0,1,\ldots,N$. Для этого заменим производные по времени и пространству на приближенные разностные аналоги $\frac{\partial}{\partial t}u(t_n,x_m) = (u(t_{n+\tau}, x_m) - u(t_n,x_m))/\tau + O(\tau)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(t_n,x_m) = (u(t_n, x_m+h) - 2u(t_n,x_m) + u(t_n,x_m-h))/h^2 + O(h^2)$ и получим систему уравнений на дискретную функцию $[u_0^n, u_1^n, \ldots, u_N^n]$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \mu\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + f(t_n,x_m),\\
&n = 0,\ldots,N-1,\ m = 1,\ldots,M-1;\\
&u_m^0 = u(0,x_m),\ m = 0,\ldots,M;\\
&u_0^n = \nu_0(t_n), u_M^n = \nu_L(t_n), n = 0,\ldots,N-1.
\end{aligned}
$$

Данный метод аппроксимации называется явной двухслойной схемой. Отметим, что необходимым условием использования схемы является условие устойчивости $\tau \leq h^2/(2\mu)$. Нарушение условия приводит к ошибочному ответу при $\tau, h \to 0$. Исследуйте вопрос близости найденного решения и точного на примере следующей задачи:

$$L = \pi,\ \mu = 1,\ f(x) = \sin x,\ u(t, x) = (1 + e^{-t}) \sin x.$$

2.74. Приближенно вычислите, как меняется со временем температура $u(t, x)$ в однородном тонком стержне, используя полностью неявную схему:

$$\begin{array}{l} \dfrac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \mu \dfrac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + f(t_{n+1}, x_m), \\ n = 0, \ldots, N-1,\ m = 1, \ldots, M-1; \\ u_m^0 = u(0, x_m),\ m = 0, \ldots, M; \\ u_0^n = \nu_0(t_n), u_M^n = \nu_L(t_n), n = 0, \ldots, N-1. \end{array}$$

На каждом шаге по времени для решения системы уравнений относительно вектора $\mathbf{u}^{n+1} = [u_0^{n+1}, \ldots, u_M^{n+1}]$ можно применить метод Гаусса, либо метод прогонки. Отметим, что схема пригодна для расчетов при любом соотношении шагов $\tau, h \to 0$. Исследуйте вопрос близости найденного дискретного решения и точного непрерывного на примере дифференциальной задачи с известным ответом, см. 2.73