Программа утверждена на заседании кафедры вычислительной математики
Протокол № 4 от 27 ноября 2014 г.

Рабочая программа дисциплины (модуля)

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Численный анализ полудинамических систем.
2. Уровень высшего образования – подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре.
3. Направление подготовки: 02.06.01 Компьютерные и информационные науки. Направленность программы: Вычислительная математика (научная специальность 01.01.07).
4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП, элективный курс по выбору кафедры, обязателен для освоения не позднее второго года обучения.
5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Формируемые компетенции *(код компетенции)*	**Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)**
УК-1 УК-3	*З1 (УК-1)* ЗНАТЬ: методы критического анализа и оценки современных научных достижений, а также методы генерирования новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях *У1 (УК-1)* УМЕТЬ: анализировать альтернативные варианты решения исследовательских и практических задач и оценивать потенциальные выигрыши/проигрыши реализации этих вариантов

	У2 (УК-1) УМЕТЬ: при решении исследовательских и практических задач генерировать новые идеи, поддающиеся операционализации исходя из наличных ресурсов и ограничений *З1 (УК-3)* ЗНАТЬ: особенности представления результатов научной деятельности в устной и письменной форме при работе в российских и международных исследовательских коллективах *У1 (УК-3)* УМЕТЬ: следовать нормам, принятым в научном общении при работе в российских и международных исследовательских коллективах с целью решения научных и научно-образовательных задач *У2 (УК-3)* УМЕТЬ: осуществлять личностный выбор в процессе работы в российских и международных исследовательских коллективах, оценивать последствия принятого решения и нести за него ответственность перед собой, коллегами и обществом
ОПК-1	З1 (ОПК-1) ЗНАТЬ: основные понятия, результаты и задачи фундаментальной математики и механики. У1 (ОПК-1) УМЕТЬ: применять основные математические методы и алгоритмы для решения стандартных задач математики. В1 (ОПК-1) ВЛАДЕТЬ: методами математического моделирования.
ПК-3	З1 (ПК3) ЗНАТЬ:

	основы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений; классические результаты теории динамических систем; общие результаты теории глобальных аттракторов; теорию локально инвариантных многообразий; методы решения нелинейных функциональных уравнений; У1 (ПК3) УМЕТЬ: теоретически и численно анализировать устойчивость полудинамических систем; численно решать различные задачи для инвариантных подпространств; применять и разрабатывать методы численного построения локально инвариантных многообразий и строго инвариантных множеств; В1 (ПК3) ВЛАДЕТЬ: методами качественного и количественного анализа полудинамических систем; приемами создания многоцелевых программных комплексов; способами эффективной обработки результатов численных экспериментов.

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет _2____ зачетные единицы,, всего 72 часа, из которых 36 часов составляет контактная работа аспиранта с преподавателем (30 часов занятия лекционного типа, 6 часов занятия семинарского типа (семинары, научно-практические занятия, лабораторные работы и т.п __8___ часов мероприятия промежуточной аттестации), 28 часов составляет самостоятельная работа аспиранта.

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Предполагаются знания основ математического анализа, линейной алгебры, дифференциальных уравнений и численных методов.

8. Формат обучения: спецкурс по выбору кафедры

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических или астрономических часов и виды учебных занятий

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них						Самостоятельная работа обучающегося, часы из них		
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости коллоквиумы, практические контрольные занятия и др)*	**Всего**	Выполне-ние домашних заданий	Подготов-ка рефератов и т.п..	**Всего**
Тема 1: Элементы функционального анализа и теории динамических систем.	13	6	1				7	6		6

Тема 2: Устойчивость в окрестности неподвижной точки.	18	8	2				10	8		8
Тема 3: Устойчивость в окрестности траектории.	13	6	1				7	5		5
Тема 4: Качественная теория дифференциальных уравнений и глобальных аттракторов.	9	4	1				5	4		4
Тема 5: Аттракторы, зависящие от параметра.	13	6	1				7	5		5
Промежуточная аттестация: экзамен	8						8			
Итого	72	30	6				44	28	0	28

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы аспирантов по дисциплине (модулю).

Списка литературы, см. 12.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

- Перечень компетенций выпускников образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования.
- Описание шкал оценивания: экзамен с *оценкой по пятибалльной шкале.*
- Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.

РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю)	**КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю) и ШКАЛА оценивания** *(критерии берутся из соответствующих карт компетенций, шкала оценивания (4 или более шагов) устанавливается в зависимости от того, какая система оценивания (традиционная или балльно-рейтинговая) применяется организацией)*					**ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ***
	1	2	3	4	5	
З1 (ПК3)	Не имеет базовых знаний	Допускает существенные ошибки	Демонстрирует частичные знания	Демонстрирует знания с небольшими пробелами	Раскрывает полное содержание основных и специальных разделов теории уравнений Навье-Стокса и численных методов их решения, их современные тенденции	экзамен в форме индивидуального собеседования
У1 (ПК3)	Не умеет и не готов формулировать	Имея базовые представления о предмете, не готов формулировать задачи и выбирать методы их решения.	Не учитывает специфики и современного состояния предмета	Не вполне готов выбирать методы анализа и интерпретировать	Готов и умеет корректно ставить задачи для системы Навье-Стокса, выбирать методы их анализа и решения, представлять и интерпретировать полученные результаты	письменное решение задач
В1 (ПК3)	Не владеет методами и навыками.	Владеет отдельными приемами	Владеет приемами и навыками решения основных стандартных задач	Владеет методами и навыками, но не готов оценивать востребованность конкретных задач в современной науке.	Полностью владеет методами решения теоретических и прикладных задач, описываемых уравнениями Навье-	экзамен в форме индивидуального собеседования

					Стокса; навыками создания и исследования новых актуальных теорий и направлений, востребованных в современной науке	

- Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

Контрольные вопросы и задания по обязательной и вариативной частям дисциплины для промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

1. Метрические, линейные, нормированные пространства.
2. Сходимость и предел.
3. Пространства R, K ,B.
4. Отображения линейных пространств.
5. Экспоненциально, полиномиально, асимптотически сжимающие отображения.
6. Принцип сжимающих, слабо сжимающих и асимптотически сжимающих отображений.
7. Определение динамических и полудинамических систем. Потоки и каскады.
8. Траектория, полутраектория, семейства полутраекторий.
9. Динамика в окрестность неподвижной точки для линейных отображений.
10. Методы численного построения инвариантных подпространств.
11. Динамика в окрестность неподвижной точки для нелинейных отображений гладких.
12. Теорема Адамара-Перрона для окрестности.
13. Построение устойчивого многообразия W- методом нулевого приближения и методом линеаризации.
14. Линейный метод сжимающих отображений для построения W-.
15. Метод функционально--аналитических рядов для W-.
16. Нелинейный метод сжимающих отображений для W-.
17. Метод нелинейного уравнения для W-.
18. Метод обратной итерации W-.
19. Приближенное построение неустойчивого W+ многообразия методом нулевого приближения и методом линеаризации.
20. Метод нелинейного уравнения W+.
21. Задачи проектирования на многообразия W-, W+.
22. Задача стабилизации по начальным данным в терминах W-.
23. Задача стабилизации по краевым условиям в терминах W-, изотропные и анизотропные продолжения.
24. Задача стабилизации по правой части в терминах W-.
25. Задача FSQ.

26. Задача FSE.
27. Стабилизация к неподвижной точке в терминах W+.
28. Локальная динамика в окрестности траектории гиперболического типа. Линейные отображения.
29. Задача численного построения инвариантных подпространств для траектории.
30. Обобщенная теорема Адамара-Перрона.
31. Метод нелинейного уравнения для построения W(0)-$ и W(0)+.
32. Практическая реализация на основе нелинейного метода сжимающих отображений.
33. Задачи проектирования на многообразия W(0)-$ и W(0)+.
34. Стабилизация к траектории в терминах W(0)-$ и W(0)+.
35. Задачи стабилизации по начальным данным, краевым условиям, правой части для окрестности траектории.
36. Задачи типа (ff) и (lf).
37. Методы решения задач асимптотической стабилизации в терминах квазипроектирования на неустойчивое многообразие.
38. Задача усвоения данных как задача стабилизации.
39. Инвариантные множества. Общие результаты об α-предельных множествах в компактных пространствах.
40. Общие результаты об ω-предельных множествах в компактных пространствах.
41. Комплексная и рациональная динамика. Множества Жюлиа и Мандельброта.
42. Системы итерированных функций. Фракталы.
43. Глобальный аттрактор: определение и свойства.
44. Полугруппы класса K. Теорема Ладыженской.
45. Полугруппы класса AK. Теорема Ладыженской – Капитанского - Костина.
46. Полугруппы градиентного типа. Теорема Бабина - Вишика.
47. Структура аттрактора.
48. Аттрактор пдс с дискретным временем. Принцип временной редукции.
49. Полугруппы с хорошей функцией Ляпунова.
50. Понятие фрактальной размерности глобального аттрактора.
51. Понятие Хаусдорфовой размерности глобального аттрактора.
52. Число определяющих мод.
53. Аттракторы полудинамических систем, зависящих от параметра.
54. Полунепрерывность аттрактора сверху и снизу.
55. Скорость притяжения к аттрактору, критерий полной непрерывности.
56. Оценки скорости притяжения.
57. Методы аппроксимации аттрактора "снаружи".
58. Методы аппроксимации аттрактора "изнутри".

- Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения: листки с определениями и задачами для самостоятельного решения.

Определение. Гладкое отображение $S(.): H \longrightarrow H$, заданное на банаховом пространстве H с нормой $\|\|$ и обладающее полугрупповым свойством $S^{i_1}\left(S^{i_1}(u)\right) = S^{i_1+i_2}$ (u), $\forall\, i_1, i_2 \in \Theta, \forall\, u \in H$ называется полудинамической системой (пдс). Здесь Θ является произвольной полугруппой.

Определение. Устойчивым многообразием ("входящий ус Адамара") подмножества O называется множество $W^{-}(S,O) = \{\, m^0 \in O: \exists\, m^{i+1} \in O, m^{i+1} = S(m^i\,), i = 0,1,2,\dots\}$,

Определение. Неустойчивым многообразием ("исходящий ус Адамара") подмножества O называется множество $W^{+}(S,O) = \{\, m^0 \in O: \exists\, m^{i+1} \in O, m^{i} = S(m^{i+1}\,), i = 0,1,2,\dots\}$.

Определение. Точка ноль является гиперболической неподвижной точкой достаточно гладкого отображения S, если в окрестности O нулевой точки можно построить линеаризацию оператора S: $S(u) = L\,u + R(u)$. При этом для ограниченного линейного$\mathrm{L}: H \longrightarrow H$ и непрерывного отображения $R\,(u) = S(u) - Lu$ найдутся операторы проектирования $P_{\pm}$ и числа $\mu, C, r > 0$ такие, что в окрестности $O = \{u\colon \left\| P_{\pm}(u) \right\| \le\, r\}$ выполнены следующие условия гиперболичности $A_1)\; P_{+} + P_{-} = I, \left\|P_{\pm}\right\| \le C_{\pm}$;

$A_2)\; \mathrm{L}(\mathrm{P}_{+}\mathrm{H}) = \mathrm{P}_{+}\,\mathrm{H},\; \mathrm{L}(\mathrm{P}_{-}\mathrm{H}) \subset\, \mathrm{P}_{-}\mathrm{H};\; A_3)\; \|\mathrm{L}\, w\| \le \mu_{-}\|\, w\|, \forall\, w \in P_{-}H, \mu_{-} <\, 1;\;\; A_4)\; \|\;\mathrm{L}\, v\| \ge \mu_{+}\|\, v\|, \forall\, v \in\; P_{+}\,H,\; \mu_{+} > 1;$

$A_5)\; \|\mathrm{R}(\mathrm{u}_1) - \mathrm{R}(\mathrm{u}_2)\| \le \theta_{\pm}(\max\{\, \|\, u_1\|, \|u_2\|\})\|u_1 -\, u_2\|\,;\;\; \forall\, u_{1,2}\colon u_{1,2} \in O$

с непрерывной положительной неубывающей функцией $\theta(\cdot)\colon \theta(0) = 0$. Отметим, что операторы P_{+} и P_{-} являются операторами проектирования вдоль подпространств $\mathrm{H}_{-} = \mathrm{P}_{-}\mathrm{H}$ и $\mathrm{H}_{+} = \mathrm{P}_{+}\mathrm{H}$ на подпространства H_{+} и H_{-} соответственно.

Определение. Пусть для некоторой точки z_0 существует полная траектория $\Gamma(z_0) = \{\, z_{i+1} = S(z_i),\; i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Предположим, что отображение S достаточно гладкое, и в окрестности O_{z_i} каждой точки $z_i \in \Gamma(z_0)$ можно построить линеаризацию оператора S: $S(z_i + u) =\; S(z_i) + L^{(i)}\, u + R^{(i)}(u)$. При этом для ограниченного линейного оператора $L^{(i)}\colon H \longrightarrow H$ и непрерывного отображения $R^{(i)}(u) =\; S(z_i + u) - S(z_i) - L^{(i)}u$ найдутся операторы проектирования $P_{\pm}^{(i)}$ и числа $\mu_{\pm}^{(i)},\; C_{\pm}^{(i)}, r^{(i)} > 0$ такие, что в окрестности $\mathrm{O}_{z_0} = \{u\colon \left\| P_{\pm}^{(i)}(z_i - u) \right\| \le\; r^{(i)}\}$ выполнены следующие условия гиперболичности

$A_1)\; P_{+}^{(i)} +\; P_{-}^{(i)} = I, \left\| P_{\pm}^{(i)} \right\| \le C_{\pm}^{(i)}\; A_2)\; L^{(i)}\left(P_{+}^{(i)}\, H\right) =\; P_{+}^{(i+1)}\, H,\; L^{(i)}\left(P_{-}^{(i)}\, H\right) \subset\; P_{-}^{(i+1)}\, H$

$A_3)\; \left\| L^{(i)}\, w\right\| \le \mu_{-}^{(i)}\|\, w\|, \forall\, w \in\; P_{-}^{(i)}\, H, \qquad \mu_{-}^{(i)} < 1\; A_4)\; \left\| L^{(i)}\, v\right\| \ge \mu_{+}^{(i)}\|\, v\|, \forall\, v \in\; P_{+}^{(i)}\, H,\; \mu_{+}^{(i)} > 1$

$A_5)\; \left\|P_{+}^{(i+1)}[R^{(i)}(u_1) - R^{(i)}(u_2)]\right\| \le \theta_{\pm}^{(i)}\,(\max\{\, \|\, u_1\|, \|u_2\|\})\; \|u_1 -\, u_2\| \;\;\forall\, u_{1,2}\colon z_i +\, u_{1,2} \in O_{z_i}$

с непрерывными положительными неубывающими функциями $\theta_{\pm}^{(i)}(.)\colon \theta_{\pm}^{(i)}(0) = 0$. При этом величины $\mu_{\pm}^{(i)}, r^{(i)},\; C_{\pm}^{(i)}$ и функции $\theta_{\pm}^{(i)}(.)$ можно выбрать общими для всех точек траектории $\Gamma_{+}(u_0)$. Сформулированные условия (A) означают, что в окрестности каждой точки z_i можно выделить подпространства $P_{+}^{(i)}\, H$ и $P_{-}^{(i)}\, H$ которые соответственно растягиваются и сжимаются относительно линейной части $L^{(i)}$ оператора S. Исходное пространство H разлагается в их прямую сумму $H = P_{+}^{(i)}H +$

$P_-^{(i)}H$. Данное разложение сохраняется относительно действия оператора $L^{(i)}$ при переходе от точки z_i к точке z_{i+1}. Будем считать, что размерность подпространства $P_+^{(0)}H$ конечна, а устойчивое пространство $P_+^{(0)}H$ имеет конечную коразмерность (это соответствует общему случаю для задач математической физики). Тогда $\Gamma(z_0)$ называется траекторией гиперболического типа.

Теорема (Адамара-Перрона)**.** Пусть O является окрестностью точки гиперболического типа. Тогда имеют место следующие утверждения:

а) многообразия $W^{\pm}(S,O)$ локально инвариантны относительно S;

б) если $m^- \in W^-(S,O)$ и $i \geq 0$, то $S^i(m^-) \in O$;

в) под действием оператора S, каждая траектория притягивается к $W^+(S,O)$;

г) если $m^+ \in W^+(S,O), i \geq 0$, то для любого существует $S^{-i}(m^+) \in O$;

д) если $u \notin W^-(S,O)$, то найдется $n = n(u) > 0$, что $S^n(u) \notin O$.

Теорема (Обобщенная теорема Адамара-Перрона). В окрестности O траектории гиперболического типа существуют локальные неустойчивое и устойчивое многообразия. При этом вблизи каждой точки z_i многообразия могут быть заданы соответственно некоторыми отображениями $g^{(i)}$ и $\boldsymbol{f}^{(i)}$, т.е.

$$W^+(S,O)|_{O_{z_i}} = W^+\left(z_i, \boldsymbol{g}^{(i)}\right), \qquad W^-(S,O)|_{O_{z_i}} = W^-\left(z_i, \boldsymbol{f}^{(i)}\right).$$

Отметим, что данный результат остается верным также для неравномерно частично гиперболических траекторий.

Задача асимптотической стабилизации по начальным данным. Пусть имеется начальная точка a_0 из малой окрестности O_{z_0} и определено конечномерное подпространство $\Upsilon \subset H$. Требуется найти такую поправку $l \in \Upsilon$, что траектория $\Gamma_+(u_0)$ точки $u_0 = a_0 + l$, сближается с траекторией $\Gamma_+(z_0)$ при $0 < i \leq n$. По сути, постановка задачи означает, что эволюционный процесс, задаваемый оператором S, с начальным условием z_0 предпочтительнее, чем с имеющимся условием a_0. Необходимо изменить начальные данные и обеспечить требуемую динамику. Подпространство Υ задает допустимые смещения при изменении начальной точки a_0.

(1). **Метод нулевого приближения.** Заменим исходный оператор S на его линеаризацию L в нулевой точке и построим проекцию a на устойчивое многообразие полученной линейной задачи. Устойчивое многообразие оператора L совпадает с подпространством P_-H, следовательно $u = P_-a$.

(2). **Метод линеаризации.** Выделим линейное приближение оператора S в заданной точке a, тогда

$S(h) = Lh + L_a h + R_a(h)$. Построим проекцию элемента a на устойчивое многообразие данной линеаризации, т.е. на устойчивое подпространство оператора $L + L_a$.

(3). **Линейный метод сжимающих отображений.** Для решения нелинейного уравнения инвариантности $W^+(S,O)$ относительно функции $f(w) \in B\_\gamma(O)$, задающей устойчивое многообразие, рассмотрим следующий итерационный процесс: $L_+ f_{k+1}(w) + R_+(f_k(w) + w) = f_k\left(L_- w + R_-(f_k(w) + w)\right)$, $f_0(w) \equiv 0$. Построим проекцию элемента a на найденное приближение $f_k(w)$ в виде $u = w + f_k(w)$, где $w = P_-a$.

(4). **Метод функционально-аналитических рядов.** Пусть $H = R^{M+N}$, $v = [v_1, \dots, v_M]$, $w = [w_1, \dots, w_N]$ и нелинейные члены оператора S имеют полиномиальный вид $R_{\pm}(v + w) = \sum_{i,j\geq 0} r_{ij}^{\pm}\ v^i\, w^j$, где $i = i_1 \dots i_M, j = j_1 \dots j_N$ представляют собой мультииндексы. Будем искать $f(w)$ в виде следующего функционально - аналитического ряда $f(w) = f_0 + f_1(w) + f_2(w,w) + f_3(w,w,w) + \cdots$ по степеням w с неизвестными полилинейными функциями f_i. Пусть $P_k[f(w)] = f_0 + f_1(w) + f_2(w,w) + \cdots + f_k(w, \dots, w)$\$. Построим проекцию элемента a на приближение $P_k[f(w)]$ в виде $u = w + P_k[f(w)]$, где $w = P_{-}a$.

(5). **Нелинейный метод сжимающих отображений.** Для решения нелинейного уравнения, задающего устойчивое многообразие рассмотрим следующий неявный итерационный процесс $L_+ f_{k+1}(w) + R_+(f_{k+1}(w) + w) = f_k\left(L_- w + R_-(f_k(w) + w)\right)$, $f_0(w) \equiv 0$. Построим проекцию элемента a на найденное приближение $f_k(w)$ в виде $u = w + f_k(w)$, где $w = P_{-}a$.

(6). **Метод нелинейного уравнения.** Перепишем условие инвариантности для -ой степени оператора S. Для решения полученного уравнения относительно $f(w)$ рассмотрим неявный метод:

$$S_+^n(f_{k+1}(w) + w) = f_k\,(S_-^n(f_k(w) + w).$$

Построим проекцию элемента a на найденное приближение $f_k(w)$ в виде $u = w + f_k(w)$, где $w = P_{-}a$.

Выберем нулевое начальное приближение $f_0(w) \equiv 0$ и рассмотрим полученную последовательность нелинейных уравнений $S_+^n(f_1(w) + w) = 0, w = P_{-}a,\ n = 0,1,2, \dots$ относительно неизвестного \$$f_1(w) \equiv f_{1,n}(w)$. Данное уравнение означает, что при каждом n для точки $u_{\{1,n\}} = f_{1,n}(w) + w$ задана проекция $w = P_{-}(a)$ и проекция $P_+(S^n(u_{1,n})) = 0$ ее образа относительно оператора S^n.

Задача приближенного построения устойчивого многообразия для траектории. Зададим некоторое $n > 0$ и возьмем отрезок положительной полутраектории $\Gamma_n^+(z_0) = \{ z_i = S^i(z_0),\ i = 0,1,2, \dots, n\}$. Для каждого $i = 0,1,2, \dots, n$ рассмотрим класс $B_\gamma^{(i)}(O^{(i)})$ всех непрерывных отображений $f(w)\colon P_-^{(i)}\, O \to P_+^{(i)}\, O$, где $O^{(i)} = \{u\colon ||\, P_{\pm}^{(i)}(u)|| \leq r^{(i)}\}$, удовлетворяющих условиям $f(0)$, $\|\, f(w_1) - f(w_2)\| \leq \gamma^{(i)} \|\, w_1 - w_2\, \|$, $\gamma^{(i)} \leq 1$. Для элементов $B_{\gamma^{(i)}}\left(O^{(i)}\right)$ определим норму $|f| = \sup_{w\in P_-^{(i)} O^{(i)}} ||f(w)||$. Пусть задана некоторая функция $f^{(n)} \in B_{\gamma^{(n)}}\left(O^{(n)}\right)$, определяющая в окрестности точки O_{z_n} локальное многообразие $W^-\left(z_n, f^{(n)}\right) = \{m = z_n + v + w\colon m \in O_{z_n}, w = P_-^{(n)}(m - z_n), v = f^{(n)}(w)\}$.

Задача (ff) нахождения такой функции $f^{(0)} \in B_{\gamma^{(0)}}\left(O^{(0)}\right)$, что для всякой точки вида $z_0 + \mathrm{w} + \mathrm{f}^{(0)}(\mathrm{w})$, $\mathrm{w} \in \mathrm{P}_-^{(0)}\, \mathrm{O}^{(0)}$, выполняется вложение $\mathrm{S}^{\mathrm{n}}\left(\mathrm{z}_0 + \mathrm{w} + \mathrm{f}^{(0)}(\mathrm{w})\right) \subset \mathrm{W}^-\left(\mathrm{z_n}, \mathrm{f}^{(\mathrm{n})}\right)$. Данное условие по сути означает, что решается функциональное уравнение $\mathrm{S}^{\mathrm{n}}(\mathrm{f}^{(0)}) = \mathrm{f}^{(\mathrm{n})}$, т.е. требуется вычислить $\mathrm{S}^{-\mathrm{n}}(\mathrm{f}^{(\mathrm{n})})$.

Метод решения задачи. Для фиксированной функции $\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}$ будем строить $\mathrm{f}^{(0)}$ последовательно за n шагов. На первом шаге по $\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}$ найдем функцию $\mathrm{f}^{(\mathrm{n}-1)}$, задающую многообразие $W^-\left(z_{n-1}, f^{(n-1)}\right)$, из условия вложения

$$S(W^-\left(z_i, f^{(i)}\right)) \subset W^-\left(z_{i+1}, f^{(i+1)}\right) \qquad (*)$$

при $i = n-1$. На следующем шаге по $f^{(n-1)}$ определим $f^{(n-2)}$ из условия (*) при $i = n-2$.

И так далее до функции $f^{(0)}$. Запишем соответствующее условие (*) в операторной форме:

$$P_+^{(i+1)}\left[S\left(z_0 + u^{(i)}\right) - S(z_0)\right] = f^{(i+1)}(P_-^{(i+1)}[S\left(z_0 + u^{(i)}\right) - S(z_0)])$$

$$u^{(i)} = f^{(i)}(w) + w,\ \forall\, w \in P_-^{(i)}\, O^{(i)}$$

Отсюда, с учетом (A), имеем

$$P_+^{(i+1)}\left[L^{(i)}\left(f^{(i)}(w) + w\right) + R^{(i)}\left(f^{(i)}(w) + w\right)\right] = f^{(i+1)}\left(P_-^{(i+1)}\left[L^{(i)}\left(f^{(i)}(w) + w\right) + R^{(i)}\left(f^{(i)}(w) + w\right)\right]\right).$$

Это позволяет выписать следующее уравнение на функцию $f^{(i)}$:

$$L_+^{(i)} f^{(i)}(w) + R^{(i)}\left(f^{(i)}(w) + w\right) = f^{(i+1)}\left(L_-^{(i)} w + R^{(i)}\left(f^{(i)}(w) + w\right)\right)$$

где $L_\pm^{(i)} = P_\pm^{(i+1)} L^{(i)}$, $R_\pm{}^{(i)} = P_\pm^{(i+1)} R^{(i)}$.

Задача (lf) проектирования начальных условий a_0 на многообразие $W^-(z_0, f^{(0)})$ вдоль подпространства $\Upsilon =< l_1, \dots, l_{i_0} >$ означает построение такого $u = a\_0 + l$, $l \in \Upsilon$, что $u \in W^-(z_0, f^{(0)})$. Уравнение, соответствующее данному условию, имеет вид $P_+^{(0)}[b_0 + l] = f^{(0)}(P_-^{(0)}[b_0 + l])$,

$$l = \sum_{i=1}^{i_0} c_i l_i,\ b_0 = a_0 - z_0$$

Для решения полученного уравнения относительно неизвестных коэффициентов c_i применим следующий итерационный процесс:

$$[b_0 + l^{k+1}] = f^{(0)}(P_-^{(0)}[b_0 + l^k]),\ l = \sum_{i=1}^{i_0} c^k{}_i l_i$$

Задача (lf$_1$). Пусть известна такая функция $f^{(1)} \in B_{\gamma^{(1)}}\left(O^{(1)}\right)$, что

$$S(W^-\left(z_0, f^{(0)}\right)) \subset W^-\left(z_1, f^{(1)}\right)$$

рассмотрим задачу о построении $u = a_0 + l$ из условия $S(u) \in W^-\left(z_1, f^{(1)}\right)$.

Соответствующее уравнение имеет вид

$$P_+^{(1)}[S(a_0 + l) - S(z_0)] = f^{(1)}(P_-^{(1)}[S(a_0 + l) - S(z_0)]).$$

Для решения данной задачи рассмотрим следующий итерационный процесс

$$P_+^{(1)}[L^{(0)}\left(b_0 + l^{k+1}\right) + R^{(0)}(b_0 + l^k)] = f^{(1)}(P_-^{(1)}[L^{(0)}\left(b_0 + l^k\right) + R^{(0)}(b_0 + l^k)]),\quad \text{где } l^k = \sum_{i=1}^{i_0} c^k{}_i e_i,\ b_0\ a_0 - z_0.$$

Метод нелинейного уравнения для траектории. Решение задачи приближенного проектирования на устойчивое многообразие вдоль подпространства Υ, как решение следующего уравнения

$$P_+^{(n)}[\, S^n(a_0 + l) - S^n(z_0)] = 0, l = \sum_{i=1}^{i_0} c_{\,i} e_i$$

относительно неизвестных коэффициентов c_i. Отметим, что данное уравнение соответствует решению задач (ff) и (lf) при $f^{(n)} \equiv 0$.

Задача асимптотической стабилизации по краевым условиям. Пусть фиксированы начальная функция $z(t=0,x)$ и некоторое краевое условие $z(t)|_{\partial\Omega} = \varphi(t,x)$ первого рода на границе. Требуется для начального условия $a(t=0,x)$ построить такое краевое условие $\varphi'(x)$, что решение $a(t,x,\varphi')$ сходится к решению $z(t,x,\varphi)$. Для нахождения функции $\varphi'(x)$ исходную задачу с условием $z(0)$ продолжают в область $\Omega' \supset \Omega$ с оператором S', $S|_{\partial\,\Omega} \equiv S'|_{\partial\,\Omega}$. Далее решают задачу продолжения функции $a(0)$ в область Ω' так, что $a' \in W^-(S', O_{z'})$. След функции $a'(t,x)|_{\partial\,\Omega}$ задает искомое краевое условие $\varphi'(t,x)$, обеспечивающее сближение траекторий $z(t), a(t)$ в исходной области.

Задача асимптотической стабилизации по правой части. Пусть задано множество $F \subset H$ допустимых поправок. Требуется построить такую функцию $\{f_i,\ i = 0,1,\dots\}$, $f_i \in F$, что положительные полутраектории $\{\, z_{i+1} = S(z_i),\ i = 0,1,2,\dots\}$ и $\{\, a_{i+1} = S(a_i) + f_{i+1} \equiv S_f\,(a_i),\ i = 0,1,2,\dots\}$ сближаются, а поправки f_i в некотором смысле оптимальны. Если дополнительно требуется, что $z_n = a_n$ для некоторого $n > 0$, то решается задача точной управляемости (точной стабилизации). Если $f_1 \neq 0$, $f_i = 0$ при $i = 2,3,\dots$, то управление называется импульсным.

Задача (F_{SQ}): требуется найти такое f, что $\left\| P_+^{(n)}[S_f^n(a_0) - S^n(z_0)] \right\| \le Q$, $f \in F$, $\|f\| \to \inf$.

Задача (F_{SE}): требуется найти такое f, что $\left\| P_+^{(n)}[S_f^n(a_0) - S^n(z_0)] \right\| \to \inf$, $f \in F$, $\|f\| \le E$.

Решение задач (F_{SQ}), (F_{SE}) *для случая* $z_0 = 0$. Если $z_0 = 0$, то условия гиперболичности принимают вид:

Пусть оператор $S(u) \equiv Lu$ линеен. Несложно показать, что в этом случае устойчивое многообразие $W^-(L,O)$ совпадает с подпространством H_-. Задача (F_{SQ}) принимает вид:

$$\|P_- + (\, L_a\, a_0 + L_f\, f)\,\| \le Q, \qquad f \in F, \qquad L_a = L^n, \qquad \|f\| \to \inf, \qquad L_f = L^{n-1} + L^{n-2} + \dots + I\,.$$

Задача (F_{SE}) принимает вид:

$\|P_+[\, L_a\, a_0 + L_f\, f]\,\| \to \inf$, $f \in F$, $L_a = L^n$, $\|f\| \le E$, $L_f = L^{n-1} + L^{n-2} + \dots + I$. Если в подпространствах $H_+, H_-^{\perp}, F$ известен конечный базис, то системы (F_{LQ}), (F_{LE}) сводятся к обобщенной задаче наименьших квадратов, в случае нелинейного оператора S применяются приближенные алгоритмы их решения.

Задача проектирования на неустойчивое многообразие. По заданным элементам $a_0, z_n \in H$ и подпространству $L \subset H$ найти такое l, что $P_+^{(n)}\left[z_n - S^{n(a_0+l)}\right] = 0$, $l \in L$, следующим методом $g_{n+1}(v) = L_- g_n(v_n) + R_-(v_n + g_n(v_n)), v_n\!: L_+ v_n + R_+(v_n + g_n(v_n)) = v, n = 0,1,\dots$

Определение. Полугруппа принадлежит *классу* K (классу компактных полугрупп), если для каждого $t > 0$ оператор $S^t(\cdot)$ компактен, т.е. для произвольного ограниченного множества $B \subset H$ образ $S^t(B)$ пред компактен.

Определение. Минимальное -притягивающее множество, если такое существует, будем называть *глобальным аттрактором* (коротко - аттрактором, минимальным глобальным B-аттрактором) и обозначать $\mathcal{M}$.

Теорема. Пусть полугруппа принадлежит классу K-полугрупп. Пусть полугруппа либо обладает B притягивающим множеством, либо ограничена и имеет притягивающее множество. Тогда полугруппа имеет минимальный глобальный аттрактор $\mathcal{M}$, который компактен, инвариантен. Если пространство H связно, то связен $\mathcal{M}$.

Теорема. Пусть дискретная полугруппа на замкнутом подмножестве Банахова пространства имеет хорошую функцию Ляпунова, компактный глобальный аттрактор $\mathcal{M}$. и множество неподвижных точек $Z(S) = \{z_i: S(z_i) = z_i\}_{i=1}^N$ разрешающего оператора конечно. Тогда каждая ограниченная траектория сходится к некоторой неподвижной точке, и для аттрактора имеет место следующее $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^N \bigcup_{t \in N_+} S^t(W(S, O_i))$ где O_i являются сколь угодно малыми окрестностями точек z_i. Аттрактор состоит из множества точек покоя и всевозможных полных траекторий, их соединяющих.

Задача 1. Построить расчетный алгоритм для нахождения проекции на устойчивое многообразие системы типа Лоренца.

Задача 2. Построить расчетный алгоритм для нахождения проекции на устойчивое многообразие нестационарного уравнения теплопроводности.

Задача 3. Построить расчетный алгоритм для нахождения проекции на устойчивое многообразие нестационарного уравнения Чафе-Инфанта.

Задача 4. Построить расчетный алгоритм для нахождения проекции на устойчивое многообразие нестационарного уравнения Бюргерса.

Задача 5. Построить расчетный алгоритм для нахождения проекции на устойчивое многообразие нестационарного уравнения Навье-Стокса.

Задача 6. Построить аппроксимацию неустойчивого многообразия для уравнения Чафе-Инфанта.

Задача 7. Построить проекцию на неустойчивое многообразие уравнений Навье-Стокса.

Задача 8. Решить задачу усвоения данных для уравнения Чафе-Инфанта.

Для решения предложенных задач применить один из рассмотренных алгоритмов.

12. Ресурсное обеспечение:

- Перечень основной и дополнительной учебной литературы:

Основная литература.

1. Ladyzhenskaya O.A. Attractors for semi-group and evolution equations. Lezioni Lincei, Cambridge University Press, 1991.
2. Fursikov A.V., Kornev A.A. Feedback stabilization for Navier-Stokes equations: Theory and Calculations // Mathematical Aspects of Fluid Mechanics. Lect. Notes Ser. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 130--172.
3. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М: Постмаркет, 1999.
4. Dymnikov V.P., Filatov A. N. Mathematics of Climate Modelling // Birkhauser, 1997.
5. Кобельков Г.М., Корнев А.А., Ольшанский М.А., Чижонков Е.В. Некоторые актуальные проблемы математического моделирования. // в сб.: Современные проблемы математики и механики. 2009, 45 с.

Дополнительная литература.

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения // Собрание сочинений Т.II, М.: изд.-во академии наук СССР, 1954.
2. Аносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова, Т. 90, 1967.
3. Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
4. Cizhonkov E.V. Numerical aspects of one stabilization method // Russ. J. Anal. Math. Modelling. 2003. 18, N. 5. P.363--376.
5. Иванчиков А.А., Корнев А.А., Озерицкий А.В. О новом подходе к решению задач асимптотической стабилизации// ЖВМиМФ. 2009.Т. 49, N.12. С. 2167-2181.

- Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»
- Перечень используемых информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса, включая программное обеспечение, информационные справочные системы (при необходимости): по ситуации.
- Описание материально-технической базы: аудиторный фонд механико-математического факультета.

13. Язык преподавания.

русский

14. Преподаватель (преподаватели).

профессор Андрей Алексеевич Корнев

Заведующий кафедрой
Вычислительной математики
профессор, д.ф.-м.н. /Кобельков Г.М./