7. Список вопросов и задачи

Литература

1. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.

2. *Бахвалов Н.С., Корнев А.А., Чижонков Е.В.* Численные методы. Решения задач и упражнения. — М.: Лаборатория знаний, 2016.

3. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. — М.: Мир, 2001.

4. *Лебедев В.И.* Функциональный анализ и вычислительная математика. — М.: Физматлит, 2005.

Программа курса.

Вычислительная погрешность.

1. Вычислительная погрешность. Устойчивость задачи и численного алгоритма.

Разностные уравнения.

2. Линейные разностные уравнения n-го порядка. Теоремы о представлении общего решения однородного уравнения и общего решения неоднородного уравнения.

3. Линейные разностные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Формулировка теорем о представлении общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части. Форма записи действительного решения.

4. Фундаментальное решение разностного уравнения. Теорема о представлении частного решения неоднородного уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами.

5. Решение задач на собственные значения для разностных уравнений, сравнение с дифференциальным случаем.

6. Построение многочленов Чебышёва первого и второго рода.

7. Свойства многочленов Чебышёва первого рода: симметричность, нули, экстремумы. Теоремы о композиции.

8. Экстремальные свойства многочленов Чебышёва первого рода на отрезке $[a, b]$.

9. Экстремальные свойства многочленов Чебышёва первого рода вне (a, b).

Решение дифференциальных уравнений.

10. Конечно-разностный метод. Аппроксимация, устойчивость, сходимость, теорема Филиппова.

11. Метод неопределенных коэффициентов построения разностных схем. Погрешность формул численного дифференцирования, оценка для оптимального шага.

12. Задача Коши, условия аппроксимации p-го порядка на решении, α-устойчивость. Модельные схемы.

13. Численные методы решения задачи Коши: метод Тейлора, методы Адамса.

14. Методы Рунге–Кутта для решения задачи Коши.

15. Вычисление главного члена погрешности для простейших схем для задачи Коши. Оценка глобальной погрешности явного одношагового метода.

16. Устойчивые и неустойчивые задачи. Жесткие системы.

17. Метод Лебедева решения жестких систем.

18. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, аппроксимация, α-устойчивость. Аппроксимация краевых условий третьего рода.

19. Устойчивость краевой задачи для уравнения второго порядка: метод собственных функций.

20. Устойчивость краевой задачи для уравнения второго порядка: энергетический метод.

21. Метод прогонки.

22. Метод стрельбы и метод Фурье.

Численные методы линейной алгебры.

23. Нормы векторов, линейных операторов, обусловленность матрицы. Оценка возмущения решения системы линейных алгебраических уравнений при возмущении правой части.

24. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Алгоритм ортогонализации Грама–Шмидта.

25. Метод отражений.

26. Невырожденная задача наименьших квадратов: метод нормального уравнения, метод QR-разложения.

27. Задача наименьших квадратов неполного ранга: методы QR-разложения и QR-разложения с выбором главного столбца

28. Сингулярное разложение. Теорема о наилучшем приближении матрицы малоранговыми матрицами в норме, подчиненной евклидовой.

29. Решение задачи наименьших квадратов полного и неполного рангов методом сингулярного разложения.

30. Задача наименьших квадратов с линейными ограничениями–равенствами: методы исключения, обобщенного сингулярного разложения, взвешиванием

31. Задача наименьших квадратов с ограничениями типа квадратных неравенств: метод обобщенного сингулярного разложения.

32. Метод простой итерации $\mathbf{x}^{k+1} = B\mathbf{x}^k + \mathbf{c}$ *для решения систем линейных алгебраических уравнений.*
33. Линейный оптимальный одношаговый метод и линейный оптимальный N*-шаговый метод.*
34. Метод наискорейшего градиентного спуска и метод минимальных невязок.
35. Итерационные методы с предобусловливателем
36. Методы Гаусса–Зейделя, Якоби и верхней релаксации
37. Проекционный алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений. Проекционная теорема, экстремальное свойство. Одномерные алгоритмы
38. Метод сопряженных градиентов.
39. Степенной метод со сдвигом для задач на собственные значения.
40. Метод обратной итерации со сдвигом для задач на собственные значения. Отношение Рэлея.
41. Инвариантные подпространства. Метод итерирования подпространств. QR-алгоритм.

Приближение функций одной переменной.

42. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Минимизация остаточного члена погрешности.
43. Наилучшее приближение в линейном нормированном и гильбертовом пространствах.
44. Многочлен наилучшего равномерного приближения. Теорема Валле–Пуссена. Теорема Чебышёва.
45. Примеры построения многочлена наилучшего равномерного приближения. Теорема единственности.
46. Сплайн–интерполяция. Линейный интерполяционный сплайн.
47. Кубический интерполяционный сплайн.
48. Локальный (аппроксимационный) сплайн.
49. Приближение по многочленам Чебышёва.
50. Дискретное преобразование Фурье. Свойства, примеры.
51. Быстрое преобразование Фурье для $N = n_1 n_2$, $N = 2^k$ *(рекурсивная форма).*
52. Интерполяция Паде–Якоби. Многоточечная интерполяция Паде.

Численное интегрирование.

53. Метод неопределенных коэффициентов построения квадратур
54. Интерполяционные квадратуры.
55. Составные квадратуры.
56. Ортогональные многочлены.
57. Квадратурные формулы Гаусса.

58. Задачи оптимизации квадратур.
59. Правило Рунге оценки погрешности. Построение программ с автоматическим выбором шага.
60. Метод Монте–Карло вычисления интегралов.
61. Вычисление интегралов в нерегулярном случае.

Решение нелинейных уравнений.

62. Метод простой итерации: сжимающие и слабо сжимающие отображения.
63. Конструктивные теоремы о сходимости метода простой итерации и существовании корней уравнения.
64. Метод хорд, метод секущих: расчетные формулы и теоремы сходимости. Метод парабол.
65. Метод Ньютона в $\mathbf{R}^1$.
66. Методы типа простой итерации для решения систем нелинейных уравнений. Методы установления.
67. Метод Ньютона в $\mathbf{R}^m$.
68. Интерполяционные методы построения итераций высшего порядка: метод Чебышёва, δ^2*-процесс Эйткена, метод Стефенсона–Хаусхолдера–Островского.*

Список обязательных задач.

Задача 1.1. *Найти общее решение в действительной форме для следующего уравнения:* $y_{k+2}+y_k=\cos\frac{\pi}{2}k$.

Задача 1.2. *Найти ограниченное фундаментальное решение уравнения* $y_{k+1}-y_k-12y_{k-1}=\delta_k^0$.

Задача 1.3. *Найти все решения задачи на собственные значения*

$$\frac{y_{k+1}-2\,y_k+y_{k-1}}{h^2}=-\lambda\,y_k\,,\quad 1\le k\le N-1\,,$$
$$y_0=0\,,\quad -\frac{2}{h^2}(y_N-y_{N-1})=-\lambda\,y_N\,,\quad h=\frac{1}{N}\,.$$

Задача 2.1. *Для задачи* $y'+y=\exp 2x$, $y(0)=1$ *построить двухточечную разностную схему второго порядка сходимости.*

Задача 2.2. *Для уравнения* $y'(x)=f(x)$ *построить схему Адамса второго порядка аппроксимации* $\dfrac{y_k-y_{k-1}}{h}=\dfrac{c_1f_{k-1}+c_2f_{k-2}}{2}$. *Найти главный член погрешности и исследовать устойчивость.*

Задача 2.3. *Для задачи* $-u''+p(x)\,u=f(x)$, $u(0)=1$, $u(1)=0$, $p(x)\ge 0$, *построить разностную схему второго порядка аппроксимации на сетке* $x_i=ih$, $i=0,\dots,N$, $h=1/N$. *Исследовать устойчивость и сходимость.*

Задача 2.4. *Для задачи* $-u''+u=f(x)$, $u'(0)=1$, $u'(1)=0$ *построить разностную схему второго порядка аппроксимации на сетке* $x_i=(i-1/2)h$, $i=0,\dots,N$, $h=1/(N-1/2)$. *Исследовать устойчивость и сходимость.*

Задача 3.1. *Пусть* B *— симметричная положительно определенная матрица. Доказать, что величину* $\sqrt{(B\mathbf{x},\mathbf{x})}$ *можно принять за норму вектора* $\mathbf{x}$, *и найти константы эквивалентности, связывающие эту норму с нормой* $||\mathbf{x}||_2$.

Задача 3.2. *Пусть* A *— матрица простой структуры, т.е. подобна диагональной, и все* $\lambda(A)\in[m,M]$, $m>0$. *Доказать, что метод* $\dfrac{\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k}{\tau}+A\mathbf{x}^k=\mathbf{b}$ *сходится при* $0<\tau<\dfrac{2}{M}$.

Задача 3.3. *Пусть у задачи* $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ *с матрицей простой структуры имеется одно отрицательное собственное значение* $\lambda_1\in[-2.01,-1.99]$, *а остальные — положительны:* $\lambda_i\in[1,3]$, $i=2,\dots,n$. *Построить сходящийся итерационный метод для решения такой системы.*

Задача 3.4. *Для решения системы* $\begin{pmatrix}\alpha&\beta&0\\ \beta&\alpha&\beta\\ 0&\beta&\alpha\end{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ *применяется метод Гаусса–Зейделя. Найти все значения параметров* α, β, *для которых метод сходится с произвольного начального приближения.*

Задача 4.1. *Функция* $f(x)=e^x$ *приближается на* $[-1,1]$ *многочленом Лагранжа по четырем равноотстоящим узлам. Найти наибольшее целое* p *в оценке погрешности следующего вида:* $\|f-L_n\|_{C[-1,1]}\le 10^{-p}$.

Задача 4.2. *Функция* $f(x)=\cos x$ *приближается многочленом Лагранжа на* $[-1,1]$ *по* n *чебышёвским узлам. При каком значении* n *величина погрешности приближения в непрерывной норме не превосходит* 10^{-5}.

Задача 4.3. *Среди всех многочленов вида* $a_3x^3+5x^2+a_1x+a_0$ *найти наименее уклоняющийся от нуля на отрезке* $[1,2]$.

Задача 4.4. *Построить многочлен наилучшего равномерного приближения степени* $n=3$ *для функции* $f(x)=3\sin^2 10x+|x^2-7x+10|$ *на отрезке* $[3,4]$.

Задача 5.1. *Оценить число разбиений отрезка* N *для вычисления интеграла* $\int_0^1\sin(x^2)\,dx$ *по составной квадратурной формуле трапеций, обеспечивающее точность* 10^{-4}.

Задача 5.2. *Построить квадратуру Гаусса с тремя узлами для вычисления интеграла* $I(f)=\int_{-1}^1\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$. *Указать алгебраический порядок точности построенной квадратуры.*

Задача 5.3. *Предложить способ вычисления интеграла* $\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx$ *по составной квадратурной формуле с постоянным шагом* h *и погрешностью* $O\left(h^2\right)$.

Задача 6.1. *Уравнение* $x=2^{x-1}$, *имеющее два корня* $z_1=1$ *и* $z_2=2$, *решают методом простой итерации* $x_{n+1}=2^{x_n-1}$. *Исследовать сходимость метода в зависимости от выбора начального приближения* x_0.

Задача 6.2. *Для решения системы* $\begin{cases}x^3-y^2=4,\\ xy^3-y=14\end{cases}$ *применяется метод Ньютона. Указать ненулевую окрестность* Q_δ *корня* $\mathbf{z}=(2,2)$ *и оценить число итераций* n, *необходимое для достижения точности* $\|\mathbf{z}-\mathbf{x}_n\|_2\le 10^{-3}$ *для произвольного* $\mathbf{x}_0\in Q_\delta$.

Задача 6.3. *Для вычисления* $a^{1/p}$ *применяется следующий алгоритм:*

$$x_{n+1}=\varphi(x_n),\ \ \varphi(x)=x\frac{(p-1)x^p+(p+1)a}{(p+1)x^p+(p-1)a}.$$

Найти порядок сходимости метода.